

HASONLÓSÁG ÉS ALKALMAZÁSA

ELMÉLET

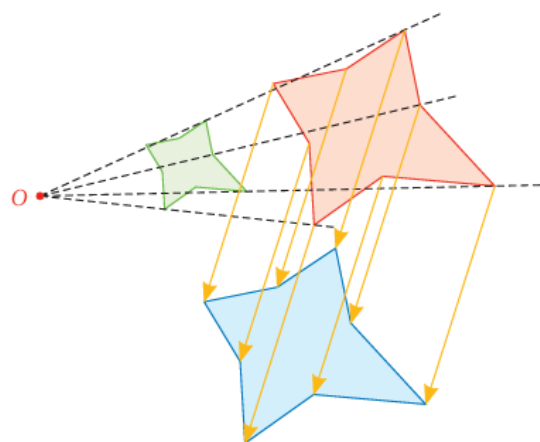
Ha egy alakzat középpontosan hasonló képét valahova elmozdítjuk és/vagy tükrözzük, akkor a keletkező harmadik alakzatra azt mondjuk, hogy ez **hasonló** az első alakzathoz. A hasonlóság jele: $\sim$
A középpontos hasonlóság aránya egyúttal az itt fellépő hasonlóságnak is aránya.
Ha a hasonlóság aránya 1, akkor egybevágóságról beszélünk. Ez azt jelenti, hogy az egybevágósági transzformációk halmaza valódi részhalmaza a hasonlósági transzformációk halmazának.

Másképp: Két alakzatot hasonlóknak mondunk, ha az egyik egy középpontos hasonlóság és egy egybevágósági transzformáció egymás után való elvégzésével a másikba vihető. Két alakzat **középpontosan hasonló**, ha az egyik létrehozható a másikkól középpontos hasonlósági transzformációval.

Például a zöld nyolcszög középpontos nagyítása a rózsaszínű nyolcszög. A nagyítás aránya $\frac{11}{5}$. A rózsaszínű nyolcszög elmozdítható úgy, hogy éppen a kék nyolcszöget kapjuk meg. Ezért azt mondjuk, hogy a zöld és a kék sokszög hasonló. A rózsaszínű sokszög oldalai $\frac{11}{5}$ -ször akkorák, mint a zöld sokszög megfelelő oldalai, és ugyanekkorák a kék nyolcszög oldalai is. A három sokszög megfelelő szögei mind egyenlők.

Megjegyzés

A zöld és a rózsaszín nyolcszögre is mondhatjuk, hogy hasonló. Ezzel kevesebbet állítunk a két sokszögről, mint ami valójában teljesül rájuk, hiszen a középpontos hasonlóság a hasonlóság különleges esete.



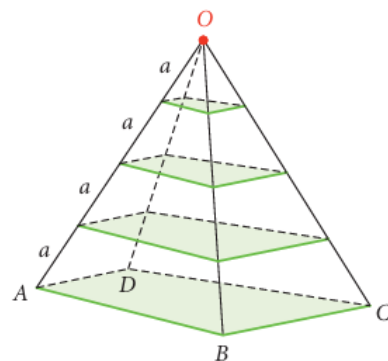
ELMÉLET

Ha egy síkidomot k arányú középpontos hasonlósággal transzformálunk, akkor a transzformáció során kapott alakzat kerülete az eredeti alakzat kerületének k -szorosa, területe pedig az eredeti alakzat k^2 -szerese.

Például

Az ábra $ABCD$ -vel párhuzamos síkú sokszögei kerületének aránya (a legkisebbtől indulva): $1 : 2 : 3 : 4$; a területük aránya: $1 : 4 : 9 : 16$.

A fenti összefüggések nem csak a középpontosan hasonló alakzatok esetén állnak fenn. Bizonyítható, hogy két **hasonló** sokszög (vagy bármely más síkidom) kerületének aránya a hasonlóságuk arányával (k -val), területének aránya a hasonlóságuk arányának négyzetével (k^2 -tel) egyenlő.



BEVEZETŐ

1. Tervrajzok általában

Egy mérnök észrevette, hogy egy fontos alkatrész tervrajzát bent hagyta az irodájában a tervezőasztalon. Telefonál az egyik munkatársának, Jánosnak:

– Légy szíves, küldd el nekem a 6-os hengersor rajzát! János látja, hogy a tervrajz túl nagy ahhoz, hogy beférjen az A/4-es méretű másológépbe (szkennerbe), ezért 1 : 4 arányú középpontos kicsinyítést végez. Az így kapott ábra megfelelő méretű, így beszkenneli, majd egy e-mail mellékleteként gyorsan elküldi a munkatársa számítógépére. A mérnök kinyomtatja a rajzot A/4-es méretben.



Milyen kapcsolat van a kinyomtatott és az eredeti rajz között?

A középpontos hasonlósággal kapott ábrán

- minden szög ugyanakkora, mint az eredetin;
- minden szakasz negyedakkora, mint az eredeti szakasz.

Ezt küldte el János egyik számítógépről a másikra. Eközben sem a szögek nagysága, sem a szakaszok hossza nem változott meg, tehát a megérkezett rajz egybevágó azzal, amit János küldött. A nyomtatás is ezekkel egybevágó rajzot eredményezett.

Tehát a mérnök a 6-os hengersor tervrajzának pontos kicsinyített változatát kapta, ezzel dolgozhat tovább. Azt mondjuk, hogy ez az ábra **hasonló** az irodában lévő eredeti tervrajzhoz. Nemcsak hasonlít hozzá, nemcsak olyasmi, mint az, hanem matematikai szakkifejezéssel: **hasonló**.



Nézzük azt a tervrajzot, amelyet János a másolással kapott!

Ez

- az eredeti kicsinyített képe és
- egybevágó azzal a tervrajzzal, amelyet a mérnök kinyomtatott.

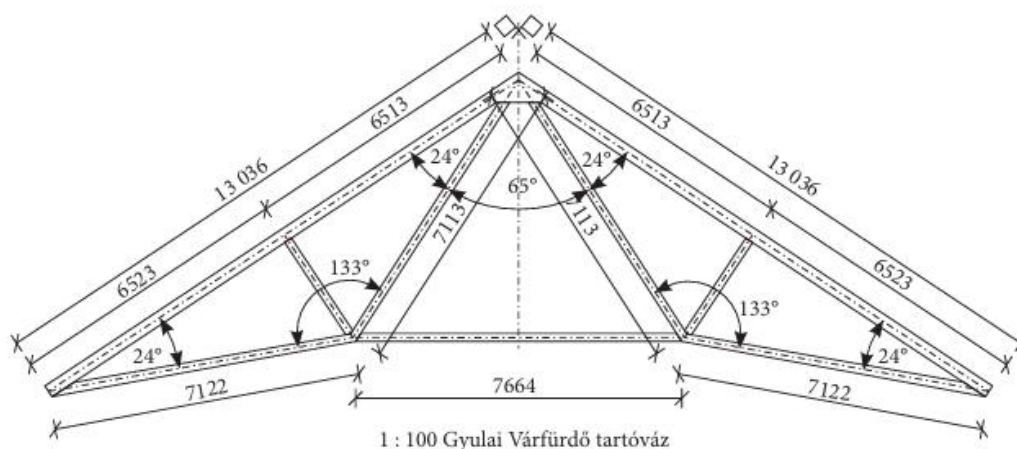
A mérnök által kinyomtatott tervrajz az eredetinek is kicsinyített képe.

2. Konkrét tervrajz

A Gyulai Várfürdő egyik épületét (eredeti feladatkörére utalva) Lovardának nevezik.

Egy 20 méteres gyógyvizes úszóme dence, három kis gyógymedence és egy gyerekpancsoló van benne. A fényképen látszik, milyen szép faváz tartja belülről az üvegezett tetőt.

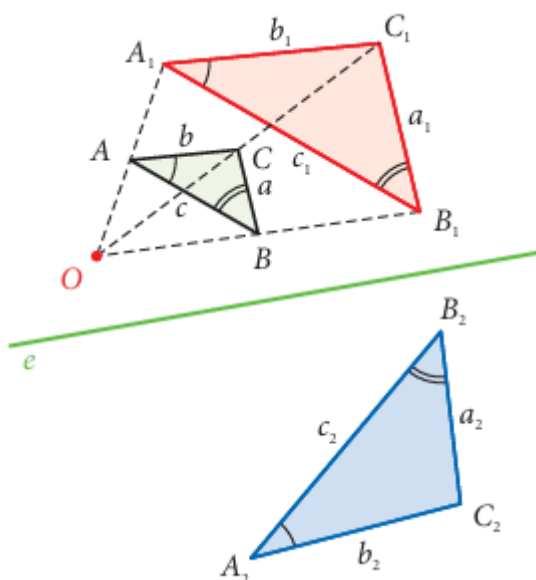
Az úszómedence fölött 9 párhuzamos, függőleges síkban ugyanolyan háromszögekből álló gerendázat (tartóváz) van. Egy ilyen részlet tervrajzát megkaptuk a tervezőktől (itt kicsinyítve mutatjuk meg).



1 : 100 Gyulai Várfürdő tartóváz

FELADATOK

- 1.** Az ABC háromszög oldalhosszúságai: 15 mm (a), 19 mm (b) és 26 mm (c). Ezt kétszeresére nagyítottuk az O pontból, majd a nagyított képet tükröztük az e egyenesre. Milyen kapcsolat van a három háromszög között, illetve mekkorák az egyes háromszögek oldalai?



- A nagyítással kapott $A_1B_1C_1$ háromszög középpontosan hasonló az eredeti ABC háromszöghöz, ezért egyben hasonló is a két háromszög: $A_1B_1C_1 \triangle \sim ABC \triangle$. A hasonlóságuk aránya 2. A nagyított háromszög oldalai: $a_1 = 30$ mm, $b_1 = 38$ mm és $c_1 = 52$ mm; szögei ugyanakkorák, mint az ABC háromszög megfelelő szögei.
- Az $A_1B_1C_1$ háromszög és az $A_2B_2C_2$ háromszög egybevágó, hiszen az e egyenesre való tükrözéssel egymásba átvihetők: $A_1B_1C_1 \triangle \cong A_2B_2C_2 \triangle$. Oldalaik hossza egyenlő ($a_2 = 30$ mm, $b_2 = 38$ mm és $c_2 = 52$ mm), megfelelő szögeik egyenlők.
(Mondhatnánk azt is, hogy a két háromszög hasonló, és a hasonlóságuk aránya 1.)
- Az $A_2B_2C_2$ háromszög hasonló az eredeti ABC háromszöghöz: $A_2B_2C_2 \triangle \sim ABC \triangle$, a hasonlóságuk aránya 2.

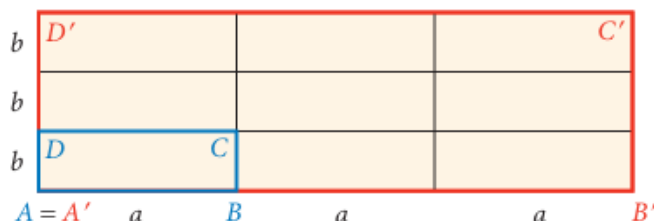
Tehát

- mindhárom háromszögnek ugyanakkorák a szögei;
- az eredeti háromszög oldalai hosszának mindkét hozzá hasonló háromszögben kétszer akkora hosszúságú oldal felel meg:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{a_2}{a} = 2, \quad \frac{b_1}{b} = \frac{b_2}{b} = 2, \quad \frac{c_1}{c} = \frac{c_2}{c} = 2;$$

- bármelyik háromszög három oldalának arányát nézve ez mindhárom háromszög esetében ugyanannyi:
 $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2 = 15 : 19 : 26$.

- 2.** Az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza legyen a és b !
 Alkalmazzunk a téglalapra egy olyan középpontos hasonlósági transzformációt, amelynek középpontja az A csúcs, a hasonlóság aránya $k = 3$!
 Határozzuk meg a kapott $A'B'C'D'$ és az eredeti $ABCD$ téglalap kerületének és területének arányát!



Megoldás

A középpontos hasonlóság tulajdonságai alapján $A'B' = 3AB = 3a$, valamint $A'D' = 3AD = 3b$.

A kerületek aránya (ahol K' az $A'B'C'D'$ téglalap, K az $ABCD$ téglalap kerülete):

$$\frac{K'}{K} = \frac{2(AB' + AD')}{2(AB + AD)} = \frac{2(3a + 3b)}{2(a + b)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot (a + b)}{2(a + b)} = 3$$

A területek aránya (ahol T' az $A'B'C'D'$ téglalap, T az $ABCD$ téglalap kerülete):

$$\frac{T'}{T} = \frac{A'B' \cdot A'D'}{AB \cdot AD} = \frac{3a \cdot 3b}{a \cdot b} = 3 \cdot 3 = 3^2$$

1. Egy háromszög oldalainak hosszúsága 12 cm, 15 cm és 16 cm. Egy ahhoz hasonló másik háromszög egyik oldala 10 cm-es.

a) Mennyi lehet a hasonlóság aránya?

b) Mekkora lehet a másik háromszög többi oldala?

Megoldás:

Kiinduló adatok:

Az eredeti háromszög oldalai:

$a = 12 \text{ cm}$

$b = 15 \text{ cm}$

$c = 16 \text{ cm}$.

A hasonló háromszög egyik oldala: 10 cm.

Mivel a feladat nem mondja meg, hogy a 10 cm-es oldal melyik eredeti oldalnak felel meg, három különböző eset lehetséges.

Nézzük meg mindegyiket!

1. eset: A 10 cm-es oldal a legkisebb (a 12 cm-es oldalnak felel meg)

a) **Hasonlóság aránya:**

$$\lambda_1 = \frac{a'}{a} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0,833$$

b) **A háromszög többi oldala:**

$$b' = b \cdot \lambda_1 = 15 \cdot \frac{5}{6} = 12,5 \text{ cm}$$

$$c' = c \cdot \lambda_1 = 16 \cdot \frac{5}{6} \approx 13,33 \text{ cm}$$

2. eset: A 10 cm-es oldal a középső oldal (a 15 cm-es oldalnak felel meg)

a) **Hasonlóság aránya:**

$$\lambda_2 = \frac{b'}{b} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

b) **A háromszög többi oldala:**

$$a' = a \cdot \lambda_2 = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8 \text{ cm}$$

$$c' = c \cdot \lambda_2 = 16 \cdot \frac{2}{3} \approx 10,67 \text{ cm}$$

3. eset: A 10 cm-es oldal a legnagyobb (a 16 cm-es oldalnak felel meg)

a) **Hasonlóság aránya:**

$$\lambda_3 = \frac{c'}{c} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = 0,625$$

b) **A háromszög többi oldala:**

$$a' = a \cdot \lambda_3 = 12 \cdot \frac{5}{8} = 7,5 \text{ cm}$$

$$b' = b \cdot \lambda_3 = 15 \cdot \frac{5}{8} = 9,375 \text{ cm}$$

2 Egy háromszög oldalainak hosszúsága 10 cm, 10 cm és 12 cm. Egy ahhoz hasonló másik háromszögnek

a) a kerülete 16 dm; **b)** a területe 12 cm^2 .

Mekkorák a másik háromszög oldalai?

Megoldás:

Az eredeti háromszög egyenlő szárú, oldalai: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$, $c = 12 \text{ cm}$.

Számítsuk ki először az eredeti háromszög kerületét (K) és területét (T):

$$K = a + b + c = 10 + 10 + 12 = \mathbf{32 \text{ cm}}$$

A területhez határozzuk meg az alaphoz tartozó magasságot (m_c) Pitagorasz-tétellel:

$$m_c = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = \mathbf{8 \text{ cm}}$$

$$T = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{12 \cdot 8}{2} = \mathbf{48 \text{ cm}^2}$$

a) eset: A hasonló háromszög kerülete $K' = 16 \text{ dm} = 160 \text{ cm}$

Határozzuk meg a hasonlóság arányát (k_a):

$$k_a = \frac{K'}{K} = \frac{160}{32} = \mathbf{5}$$

A másik háromszög oldalai az eredeti oldalak 5-szörösei:

$$a' = 10 \cdot 5 = \mathbf{50 \text{ cm}}$$

$$b' = 10 \cdot 5 = \mathbf{50 \text{ cm}}$$

$$c' = 12 \cdot 5 = \mathbf{60 \text{ cm}}$$

b) eset: A hasonló háromszög területe $T' = 12 \text{ cm}^2$

Mivel a területek aránya a hasonlósági arány négyzetével (k^2) egyezik meg:

$$k_b^2 = \frac{T'}{T} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

Ebből a hasonlóság aránya (k_b):

$$k_b = \sqrt{\frac{1}{4}} = \mathbf{0,5}$$

A másik háromszög oldalai az eredeti oldalak felei:

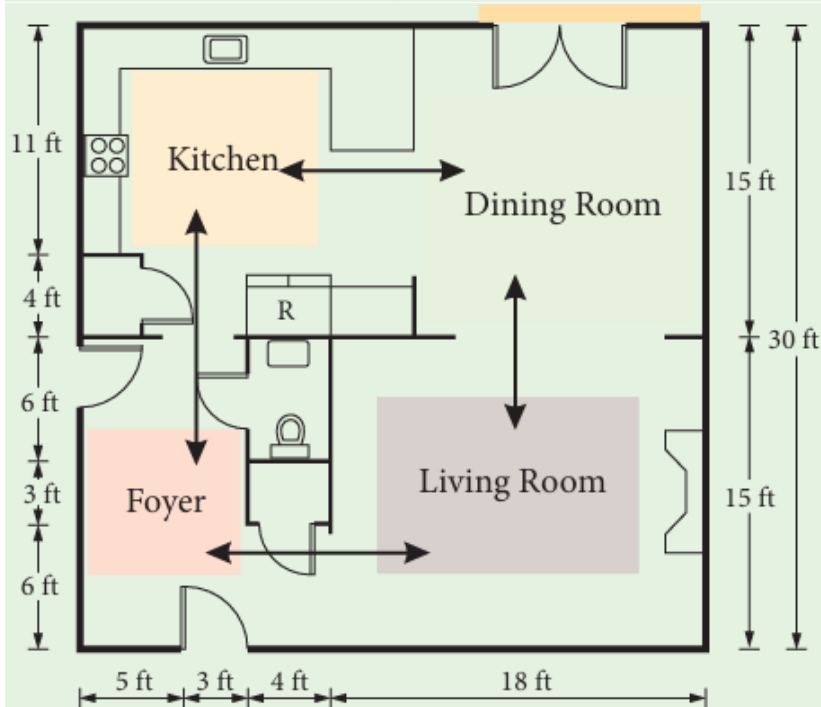
$$a'' = 10 \cdot 0,5 = \mathbf{5 \text{ cm}}$$

$$b'' = 10 \cdot 0,5 = \mathbf{5 \text{ cm}}$$

$$c'' = 12 \cdot 0,5 = \mathbf{6 \text{ cm}}$$

3 Egy külföldi megrendelő többszintes családi házat szeretne építtetni. Az alábbi tervrajz az épület alsó szintjéről készült, melyen az adatokat – az Egyesült Államokban mai napig használatos – láb (angolul foot, rövidítése: ft) mértékegységben tüntették fel. A magyar kivitelező számára olyan tervrajzot szeretnénk készíteni, melyen a méretek méterben szerepelnek. Hivatalosan $1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m}$, de a feladatban számoljunk $1 \text{ ft} = 0,3 \text{ m}$ átváltással!

A méretarány az a szám, amely megmutatja, hogy a rajzon 1 cm hosszúság a valóságban hány cm-nek felel meg (jelölésére $M = 1$: valóságbeli hossz alakot szokás használni).



- Milyen széles a valóságban az ábra alsó vízszintes vonalán jelölt bejárati ajtó?
- Mekkora az a lehető legnagyobb méretarányú rajz, amely elfér egy A2 méretű lapon, ha a lap szélen legalább 1,2 cm széles keretet biztosítunk az adatok megjelenítéséhez?
- Add meg cm-ben az a) esetben elkészített tervrajzon a living room (nappali) adatait!

Megoldás:

Alapadatok az átváltáshoz:

$$1 \text{ ft} = 0,3 \text{ m} = 30 \text{ cm}$$

Az A2-es papírlap méretei: $42,0 \text{ cm} \times 59,4 \text{ cm}$

a) eset: A bejárati ajtó valóságos szélessége

A rajz alsó vonalán a bejárati ajtó szélessége a méretvonal szerint: $d = 3 \text{ ft}$.

A valóságos szélesség méterben:

$$d_{\text{valóság}} = 3 \cdot 0,3 \text{ m} = \mathbf{0,9 \text{ m}} \quad (90 \text{ cm})$$

b) eset: A lehető legnagyobb méretarány meghatározása egy A2-es lapon

1. Határozzuk meg a ház valóságos maximális méreteit a tervrajz alapján:

$$\text{Szélesség: } W_{\text{valóság}} = 5 \text{ ft} + 3 \text{ ft} + 4 \text{ ft} + 18 \text{ ft} = 30 \text{ ft} = 30 \cdot 0,3 \text{ m} = \mathbf{9 \text{ m}} \quad (900 \text{ cm})$$

$$\text{Magasság: } H_{\text{valóság}} = 30 \text{ ft} = 30 \cdot 0,3 \text{ m} = \mathbf{9 \text{ m}} \quad (900 \text{ cm})$$

2. Számítsuk ki a rajzolásra használható maximális helyet az A2-es lapon:

A lap szélén minden oldalon legalább 1,2 cm-es keretet kell hagyni, így a szélességből és a magasságból is $2 \cdot 1,2 = 2,4 \text{ cm}$ esik ki.

$$W_{\text{papír}} = 42,0 \text{ cm} - 2,4 \text{ cm} = \mathbf{39,6 \text{ cm}}$$

$$H_{\text{papír}} = 59,4 \text{ cm} - 2,4 \text{ cm} = \mathbf{57,0 \text{ cm}}$$

Mivel a ház alaprajza egy $900 \text{ cm} \times$

900 cm -es négyzet, a lap kisebbik hasznos mérete ($39,6 \text{ cm}$) fogja korlátozni a nagyítást.

3. A maximális méretarány ($M = 1 : n$) kiszámítása:

$$n = \frac{\text{Valóságos méret}}{\text{Papír mérete}} = \frac{900 \text{ cm}}{39,6 \text{ cm}} \approx \mathbf{22,73}$$

Mivel a tervrajzokon szabványos, kerekített méretarányokat szokás alkalmazni (pl. $1 : 25$,

$1 : 50$),

a legkisebb olyan egész szabványos méretarány, amellyel a rajz még biztonságosan ráfér a lapra:

$M = 1 : 25$

c) eset: A nappali (living room) adatai a tervrajzon cm-ben (az a) esetre vonatkoztatva)

Az a) pontban a valóságos méreteket számoltuk ki. Ha a feladat az eredeti, lábban megadott adatok centiméterre történő közvetlen átszámítását kéri a valóságra nézve:

A nappali sávjának teljes szélessége az ábra alján látható méretezés szerint: 18 ft .

$$W_{\text{nappali}} = 18 \cdot 30 \text{ cm} = \mathbf{540 \text{ cm}}$$

A nappali sávjának magassága a jobb oldali méretezés szerint: 15 ft .

$$H_{\text{nappali}} = 15 \cdot 30 \text{ cm} = \mathbf{450 \text{ cm}}$$

Így a nappali méretei centiméterben kifejezve: $\mathbf{540 \text{ cm} \times 450 \text{ cm}}$.

- 1. a)** Az 1 : 3000 méretarányú térképen egy téglalap alakú telek oldalainak hossza 3,2 cm és 3,8 cm. Mekkora a telek területe?
- b)** Az 1 : 3 000 000 méretarányú térképen mekkora Magyarország területe?

Megoldás

- a) A valódi téglalap oldalai 3000-szer akkora, mint a térképen: $3000 \cdot 3,2 = 9600$ (cm), illetve $3000 \cdot 3,8 = 11\,400$ (cm), vagyis 96 m, illetve 114 m. A téglalap alakú telek valódi területe tehát négyzetméterben számolva: $96 \cdot 114 = 10\,944$. A mérések pontatlansága miatt ez természetesen közelítő érték. Ezért elegendő lehet annyit mondanunk, hogy a telek területe megközelítőleg $11\,000\text{ m}^2$, vagy másképp 1,1 hektár.
- b) Magyarország területe megközelítőleg $93\,000\text{ km}^2$. A térképen az ország kicsinyített mását látjuk, a hasonlóság aránya $k = \frac{1}{3\,000\,000}$. Később tanulni fogunk arról, hogy hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság négyzetével egyenlő, így a térképen Magyarország területe $93\,000 \cdot k^2$ (km^2).

A „túl nagy” számok miatt célszerű normálalakot használni.

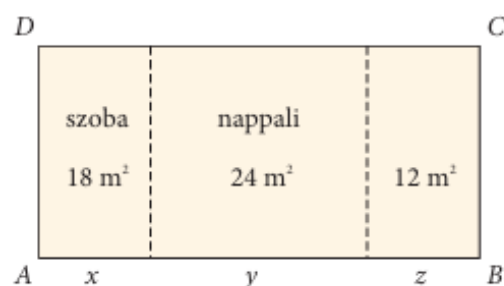
A térképen Magyarország területe: $9,3 \cdot 10^4 \cdot \left(\frac{1}{3 \cdot 10^6}\right)^2 = 9,3 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^{12}} \approx 1,03 \cdot 10^{-8}$ (km^2).

A térkép területét nem szokás négyzetkilométerben megadni, váltsuk át cm^2 -be!

Tudjuk, hogy $1\text{ km} = 10^5\text{ cm}$, ezért $1\text{ km}^2 = (10^5)^2\text{ cm}^2 = 10^{10}\text{ cm}^2$. Így $1,03 \cdot 10^{-8}\text{ km}^2 = 1,03 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{10}\text{ cm}^2 = 103\text{ cm}^2$.
Magyarország területe a térképen körülbelül 103 cm^2 ($\approx 1\text{ dm}^2$).

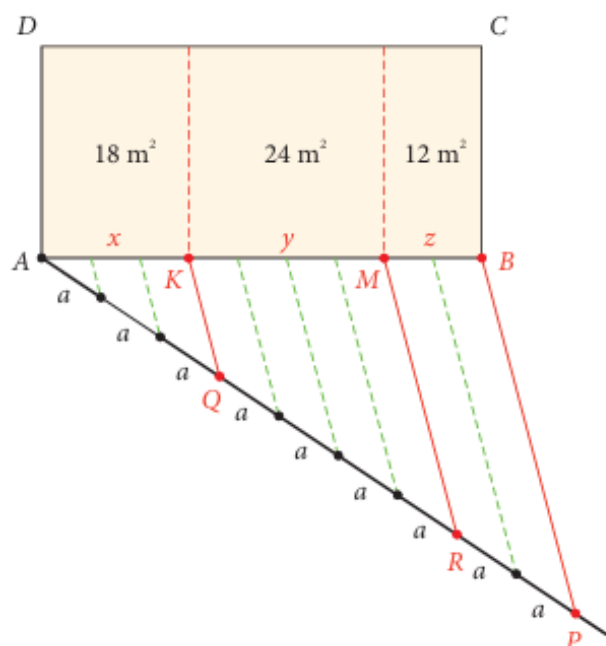
PÁRHUZAMOS SZELŐK TÉTELE

Egy 54 m^2 -es lakótelepi lakás alaprajza téglalap. A két elválasztó fal három téglalap alakú részt hoz létre: egy 18 m^2 -es szobát, egy 24 m^2 -es nappalit és a többi helyiség (előszoba, konyha, fürdőszoba és WC) számára egy 12 m^2 -es téglalap alapú helyiséget. A műszaki rajzolónak csak a lakás alaprajzának a vázlatát adta oda a tervező, a megfelelő utasításokkal. A rajzoló feladata megszerkeszteni ezen az ábrán a két elválasztó fal helyét. Hogyan teheti ezt meg?



Megoldás

A három téglalap területének aránya $18 : 24 : 12 = 3 : 4 : 2$, ezért az AB oldalra illeszkedő oldalaik aránya ugyanennyi (hiszen az erre merőleges oldalaik egyenlő hosszúak). A rajzoló feladata tehát az, hogy az AB szakaszt ossza fel szerkesztéssel három részre úgy, hogy a részek hosszának arányára az $x : y : z = 3 : 4 : 2$ összefüggés igaz legyen. A szerkesztés az alábbi ábrán nyomon követhető:



- Egy A kezdőpontú félegyenest rajzolunk, amelynek egyenesén nincs rajta a B pont.
- A megrajzolt félegyenestre A -tól indulva kilenc egyenlő hosszúságú, egymáshoz csatlakozó szakaszt mérünk fel (mert az arányszámok összege $3 + 4 + 2$, vagyis 9). A kilencedik szakasz A -tól távolabbi végpontja legyen a P pont. Megrajzoljuk a PB szakaszt.
- A harmadik és a hetedik szakasz A -tól távolabbi végpontján (Q -n, illetve R -en) keresztül párhuzamost szerkesztünk a PB -vel. E két párhuzamosnak az AB -vel való metszéspontjai (K , illetve M) adják a keresett osztópontokat az AB szakaszon.

Megjegyzés

Közelítő megoldásnak megfelelne az, hogy a rajzoló megméri az AB szakasz hosszát, majd elosztja ezt 9 -cel ($3 + 4 + 2 = 9$). Ezután rendre felméri az AB szakaszra egy 3 -szor ilyen hosszú, majd ehhez csatlakozva egy 4 -szer ilyen hosszú szakaszt. Egy műszaki rajzoló számára ez a megoldás nem elfogadható, mert rajzeszközeivel ennél az eljárásnál pontosabban tudja megszerkeszteni a kívánt osztópontokat.
